

Лекция 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА НАСАЖДЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одним из значительных вкладов в моделирование процесса роста леса было признание, что дифференциальные уравнения могут быть эффективно использованы для описания «изменений», происходящих в ходе роста насаждений.

Бакман (1962) и Крутгер (1963) были среди первых, кто применил этот принцип к одновозрастным, а Д. Мозер и Холл (1969) – к разновозрастным насаждениям США. Общая цель – разработать функции для предсказания суммы площадей сечений или запаса древостоя. Результирующие уравнения выражали сложный составной выход процесса динамики так называемых компонентов леса: рост живых деревьев, компонент деревьев, переходящих в другую ступень толщины («вращание»), динамика отпада и компонент вырубленных деревьев.

Чтобы описать сложную систему динамики древостоя, необходимо определить компоненты этой системы:

$Y_{i,1}$ – число деревьев в древостое в i -том классе объемов в данный момент;

$Y_{i,2}$ – сумма площадей сечений $Y_{i,1}$ деревьев;

$Y_{i,3}$ – объем $Y_{i,1}$ деревьев;

$Y_{i,4}$ – число вросших деревьев в i -тый класс объемов в интервале времени $[t_0, t_n]$; $Y_{i,5}$ – их $\sum G$;

$Y_{i,5}$ – объем $Y_{i,4}$ вросших деревьев;

$Y_{i,6}$ – число деревьев отпада в i -том классе в период $[t_0, t_n]$;

$Y_{i,7}$ – сумма площадей сечений деревьев $Y_{i,6}$ отпада;

$Y_{i,8}$ – объем деревьев $Y_{i,7}$ отпада;

$Y_{i,9}$ – общая (кумулятивная с учетом отпада и вращаения) сумма $Y_{i,2}$ площадей сечений $Y_{i,1}$ деревьев в интервале $[t_0, t_n]$;

$Y_{i,10}$ – общий (суммарный) объем деревьев $Y_{i,1}$ в интервале $[t_0, t_n]$

где $i = 1, 2, \dots, 6$ – классы объемов; t_0, t_n – первоначальный и конечный периоды роста ($t_0 < t_n$).

Д. Мозер (1974) при разработке системы дифференциальных

уравнений принял следующие классы объемов:

Таблица 7. Зависимость класса объемов от диаметра дерева

Класс объёмов	1	2	3	4	5	6
Диаметр деревьев, см	5–11	12–24	25–35	36–47	48–60	>60

Следовательно, в целом система описывается 66 компонентами (11×6). Для всех 6 классов объемов во время (t_0) компоненты будут: $Y_{i,1}(t_0), Y_{i,2}(t_0), \dots, Y_{i,j}(t_0) = 0$ для $j = 4, \dots, 11$. в любой момент времени, скажем, (t_n) число деревьев в i -том классе объема должно быть равно алгебраической сумме первоначального числа деревьев в период (t_0), кумулятивного вращающегося, отпада и перерастания (перехода) в следующий ($i+1$) класс объема:

$$Y_{i,1} = Y_{i,1}(t_0) + Y_{i,4} - Y_{i,7} - Y_{i+1,4} \quad (138)$$

для $i = 1, 2, \dots, 5$.

Так как наибольший класс объема не имеет верхней границы, то число деревьев в данный момент в этом классе будет

$$Y_{6,1} = Y_{6,1}(t_0) + Y_{6,4} - Y_{6,7}. \quad (139)$$

С учетом кумуляты числа растущих деревьев подобное уравнение может быть записано для суммы площадей сечений и объемов в разных классах в любой данный момент времени:

$$\begin{aligned} Y_{i,2} &= Y_{i,2}(t_0) + Y_{i,5} - Y_{i,8} - Y_{i+1,5} + Y_{i,10}; \\ Y_{i,3} &= Y_{i,3}(t_0) + Y_{i,6} - Y_{i,9} - Y_{i+1,6} + Y_{i,11} \end{aligned} \quad (140)$$

для $i = 1, \dots, 5$.

Для класса объемов (6) соответственно будет

$$\begin{aligned} Y_{6,2} &= Y_{6,2}(t_0) + Y_{6,5} - Y_{6,8} + Y_{6,10}; \\ Y_{6,3} &= Y_{6,3}(t_0) + Y_{6,6} - Y_{6,9} + Y_{6,11}. \end{aligned} \quad (141)$$

Подобным образом можно записать выражения для других таксационных признаков деревьев в древостое. Общее число деревьев (N), общая сумма площадей сечений (G), общий запас древостоя (M) – все они соответственно вычисляются как суммы от 1 до 6 классов:

$$N = \sum_{j=1}^6 Y_{i,1}; G = \sum_{j=1}^6 Y_{i,2}; M = \sum_{j=1}^6 Y_{i,3}. \quad (142)$$

Суммирование по всем шести классам объема может быть выполнено для описания общего роста живых деревьев по площади сечения и запасу, общему отпаду и т. д.

Вышеперечисленные уравнения связывают компоненты роста леса в определенные моменты времени. Так как отдельные элементы варьируют во времени, этот общий подход используется в случае, где правые части уравнений могут быть выражены в функциональной временной зависимой форме. Этот принцип можно применить к одно-возрастным насаждениям, к разновозрастным нельзя, так как возраст древостоя не может быть использован как зависимая переменная. Взяв производные в уравнениях (137–141), следующая система дифференциальных уравнений может быть использована, чтобы описать динамические внутренние связи компонентов роста леса, те свойства, которые не нарушат биологических принципов (Пиенаар, Турнбулл 1973), тогда они будут отражать связи между компонентами (Леанари 1970).

Процесс вращивания деревьев в первый класс объема (4–10 см) описывается регрессионной моделью:

$$dY_{i,4} / dt = b_0 + b_1 G. \quad (143)$$

Предполагая, что деревья равномерно распределены в классе объемов и все деревья в классе растут в среднем темпе роста, Мейер (1953) фактор динамики (перехода) деревьев в другой класс предложил определять по формуле

$$R = (Z_d^T / W)n, \quad (144)$$

где Z_d^T – периодический средний прирост по диаметру; W – ширина (величина интервала) класса; n – число деревьев в классе.

Сумма площадей сечения деревьев в i -том классе будет

$$Y_{i,5} = (0,005454d_i)Y_{i,4} \quad (145)$$

для $i = 1, \dots, 6$,

где d_i – диаметр дерева на границе перехода в другой класс.

Производная функции (145) дает уравнение скорости вращивания по сумме площадей сечений:

$$dY_{i,5} / dt = G_i dY_{i,4} / dt, \quad (146)$$

где G_i – площадь сечения диаметра d_i . Уравнение скорости вращивания по запасу имеет вид

$$dY_{i,6} / dt = V_i dY_{i,4} / dt, \quad (147)$$

где V_i – объем дерева с диаметром d_i .

Уравнения 143–147 обеспечивают функциональные связи для 18 основных моделей процесса вращивания деревьев.

Исследования Джекобса (1968), Эрдмана (1972), Морзе (1974) показали, что в пределах данного класса объемов (ступени толщины) прирост по площади сечения имеет положительную корреляцию с площадью сечения и числом деревьев, а отрицательную – с суммой площадей сечений следующего класса.

Д. Морзе для описания прироста по сумме площадей сечения в i -том классе объемов предложил систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 dY_{1,10} / dt &= a_{1,1}Y_{1,1}G + a_{1,2}Y_{1,1}^{a_{1,3}} Y_{1,2}^{a_{1,4}} e^{(a_{1,5}Y_{2,2} + a_{1,6}Y_{3,2} + \dots + a_{1,9}Y_{6,2})}, \\
 dY_{2,10} / dt &= a_{2,1}Y_{2,1}G + a_{2,2}Y_{2,1}^{a_{2,3}} Y_{2,2}^{a_{2,4}} e^{(a_{2,5}Y_{3,2} + a_{2,6}Y_{4,2} + \dots + a_{2,8}Y_{6,2})}, \\
 dY_{3,10} / dt &= a_{3,1}Y_{3,1}G + a_{3,2}Y_{3,1}^{a_{3,3}} Y_{3,2}^{a_{3,4}} e^{(a_{3,5}Y_{4,2} + a_{3,6}Y_{5,2} + \dots + a_{3,7}Y_{6,2})}, \\
 dY_{4,10} / dt &= a_{4,1}Y_{4,1}G + a_{4,2}Y_{4,1}^{a_{4,3}} Y_{4,2}^{a_{4,4}} e^{(a_{4,6}Y_{6,2} + a_{4,5}Y_{5,2})}, \\
 dY_{5,10} / dt &= a_{5,1}Y_{5,1}G + a_{5,2}Y_{5,1}^{a_{5,3}} Y_{5,2}^{a_{5,4}} e^{(a_{6,5}Y_{6,2})}, \\
 dY_{6,10} / dt &= a_{6,1}Y_{6,1}G + a_{6,2}Y_{6,1}^{a_{6,3}} Y_{6,2}^{a_{6,4}},
 \end{aligned} \tag{148}$$

где $a_{i,j}$ – коэффициент уравнений.

Объем деревьев в каждом классе ($i = 1, \dots, 6$) связан с суммой площадей сечения следующим уравнением:

$$Y_{i,3} = C_{i,1}Y_{i,2}^{C_{i,2}} \tag{149}$$

Первая производная уравнения (149) дает следующие уравнения темпа роста по объему деревьев:

$$dY_{i,11} / dt = \left[C_{i,2} C_{i,1} Y_{i,2}^{(C_{i,2}-1)} \right], \tag{150}$$

где $C_{i,j}$ – коэффициенты уравнений.

Отпад является наиболее важным компонентом роста древостоя и одним из наиболее трудных для моделирования и прогнозирования. R. Monserud (1976) отпад по числу деревьев ($Y_{i,7}$) выразил в зависимости от числа деревьев ($Y_{i,1}$) и суммы площадей сечения ($Y_{i,2}$) по ступеням толщины:

$$\begin{aligned}
 dY_{1,7} / dt &= m_{1,1}Y_{1,1}^{m_{1,2}} e^{(m_{1,3}Y_{1,2} + m_{1,4}Y_{2,2} + m_{1,5}Y_{3,2} + m_{1,6}Y_{4,2} + m_{1,7}Y_{5,2} + m_{1,8}Y_{6,2})}, \\
 dY_{2,7} / dt &= m_{2,1}Y_{2,1}^{m_{2,2}} e^{(m_{2,3}Y_{2,2} + m_{2,4}Y_{3,2} + m_{2,5}Y_{4,2} + m_{2,6}Y_{5,2} + m_{2,7}Y_{6,2})}, \\
 dY_{3,7} / dt &= m_{3,1}Y_{3,1}^{m_{3,2}} e^{(m_{3,3}Y_{3,2} + m_{3,4}Y_{4,2} + m_{3,5}Y_{5,2} + m_{3,6}Y_{6,2})},
 \end{aligned} \tag{151}$$

$$\begin{aligned}
dY_{4,7} / dt &= m_{4,1} Y_{4,1}^{m_{4,2}} e^{(m_{4,3} Y_{4,2} + m_{4,4} Y_{5,2} + m_{4,5} Y_{6,2})}, \\
dY_{5,7} / dt &= m_{5,1} Y_{5,1}^{m_{5,2}} e^{(m_{5,3} Y_{5,2} + m_{5,4} Y_{6,2})}, \\
dY_{6,7} / dt &= m_{6,1} Y_{6,1}^{m_{6,2}} e^{(m_{6,3} Y_{6,2})},
\end{aligned}$$

где $m_{i,j}$ – коэффициенты уравнений.

Предполагая, что отпад на одно дерево по площади сечения и объему в классе равен показателям среднего дерева класса, можно представить уравнения темпа роста по сумме площадей сечения и объему деревьев:

$$\begin{aligned}
dY_{i,8} / dt &= (Y_{i,2} / Y_{i,1}) dY_{i,7} / dt; \\
dY_{i,9} / dt &= (Y_{i,3} / Y_{i,1}) dY_{i,7} / dt
\end{aligned} \tag{152}$$

для $i = 1, \dots, 6$.

Для прогнозирования будущего состояния древостоя необходимо выполнить совместное решение системы дифференциальных уравнений. Это означает, что определив функции для $(Y_{i,j})$ и подставив их в уравнения системы, преобразовывают эти уравнения в тождества. Аналитическое решение предпочтительнее выполнять на ЭВМ. Д. Мозер (1974) разработал программу на ЭВМ для прогнозирования роста клена сахарного в США. Программа состоит из основной программы и четырех подпрограмм. Основная принимает вводы пользователя, аргументы первоначальных подпрограмм и выполняет последовательные вычисления. Подпрограммы используются для вычисления правых частей уравнения, числового интегрирования и печати таблиц прогноза древостоя.

Рубка рассматривается как один из компонентов процесса роста древостоя. Она вводится в систему путем переоценки первоначального состояния древостоя в период $[t_0, t_n]$. Например, рубка на 5 году в периоде записывается

$$Y_{i,1}(t'_0) = Y_{i,1}(5), \tag{153}$$

где $Y_{i,1}(5)$ – число деревьев рубки в i -том классе.

В общем: $Y_{i,1}(t'_0)$, при $i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, 11$.

Вводными данными в систему являются первоначальные число деревьев, суммы площадей сечения и запасы по ступеням толщины (табл. 8).

Выход системы включает: число деревьев, суммы площадей се-

чений и запасы по ступеням толщины, текущий среднепериодический прирост по площади сечения и запасу древостоя, размер промежуточного пользования.

Таблица 8. **Прогнозирование компонентов динамики насаждения**

Ступень толщины, дюймов	1972 год		Динамика числа деревь- ев за 10 лет			1983 год	
	число деревьев	запас, куб. футов	вращание	отпад	рубка	число деревьев	запас, куб. футов
3	125	114	108	12	10	186	180
7	40	251	25	–	10	55	358
12	31	794	0	–	10	14	417
17	24	1251	7	–	10	16	810
22	9	766	5	–	10	4	340
>24,5	2	198	0	–	2	0	0
ИТОГО	231	3374	108	12	52	275	2105

Система позволяет оценить естественное вращание (переход) деревьев подроста (108 деревьев в табл. 8) в древостой, переход деревьев в следующую ступень толщины, т. е. более детально описать ход роста насаждения.